

Def. n. h. zu III. 17: Seien $Z_1, \dots, Z_n$ Zufallsvektoren (-variablen) mit gemeinsamer Dichte $f(\cdot, \theta)$ mit $\theta \in \Theta$ (d.h. $W = (Z_1', Z_2', \dots, Z_n')'$ hat gemeinsame Dichte $f(w, \theta)$)

Seien $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Beobachtungen aus $Z_1, \dots, Z_n$
Dann heißt $L_n(\theta; z_1, \dots, z_n) = L_n(\theta) = f(\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_n}_w, \theta)$ die Likelihood-Funktion der Daten

(Ist $L_n(\theta) > 0$, so heißt $\ln(\theta) = \log L_n(\theta)$ die Log-Likelihood Funktion)

(ii) Seien $Z_1, \dots, Z_n$ diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer W.-Funktion $p(\cdot, \theta)$ (d.h. $W = (Z_1', \dots, Z_n')'$ hat W.-Funktion $p(w, \theta)$)

Seien $z_1, \dots, z_n$ die Beobachtungen aus $Z_1, \dots, Z_n$

Dann heißt

$$L_n(\theta; z_1, \dots, z_n) = L_n(\theta) = p(z_1, \dots, z_n, \theta)$$

die Likelihood-Funktion der Daten

(Ist $L_n(\theta) > 0$...)

Bsp III. 18 Moving-Average-Prozess

$$Z_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \text{ wobei } \varepsilon_t \text{ i.i.d. } N(0, \sigma^2)$$

Beobachtungen
 $z_1, \dots, z_n$

Unbekannter Parameter $\theta = \begin{pmatrix} b \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$
 $\in \mathbb{R} \times (0, \infty)$
- Θ

Erinnerung: $E(z_t) = 0$ $\text{Var}(z_t) = E(z_t^2) = \sigma^2(1+b^2)$, $\text{Cov}(z_t, z_{t+1}) = \sigma^2 b$
($\neq 0$, außer $b=0$)

$$W = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & b & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = E$$

$n \times (n+1)$ $(n+1) \times 1$

$= B$

$\sim N_n(0, \sigma^2 I_{n+1})$
nach Bsp I. 41

$$W = B \cdot E \quad E \sim N_n(0, \sigma^2 I_{n+1})$$

letzte
Spalte und
b - vorletzte
Spalte

Rang von $B^T = n$

Nach Reproduktionssatz g.U.:

$$W \sim N(0, \sigma^2 B B^T)$$

$$\begin{aligned} \text{VC}(B \cdot E) &= B \text{VC}(E) B^T \\ &= \sigma^2 B B^T \end{aligned}$$

$$I_n$$

$$\begin{bmatrix} b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & b & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times (n+1)$

$$\Downarrow$$

$$\text{Rang}(B) = n$$

N.B.: Spaltenoperationen auf B

$$B \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] 2$$

$$L_n(b, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det(\sigma^2 BB'))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} W' (\sigma^2 BB')^{-1} W\right)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} (\det(BB'))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (z_1, \dots, z_n) (BB')^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right)$$

$$L_n(b, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \log \det(BB') - \frac{1}{2\sigma^2} (z_1, \dots, z_n) (BB')^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

unbekannt

$\hat{b}_{ML}, \hat{\sigma}_{ML}^2$ muss durch numerische Maximierung gefunden werden ($\rightarrow$ Software)

III 3. Eigenschaften von ML- und Momentenschätzern

Bsp. III. 19 z_i i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$

Schätzer: $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$ (alternativ: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$)

Wissen:

(1) $E(\hat{\mu}) = \mu$ (d.h. $\hat{\mu}$ unverzerrt) d.h. $\text{Bias}(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu}) - \mu = 0$

(2) $\text{Var}(\hat{\mu}) = E[(\hat{\mu} - E(\hat{\mu}))^2] = E[(\hat{\mu} - \mu)^2] = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i - \mu\right)^2\right] =$

$$= E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^n (z_i - \mu)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n E[(z_i - \mu)^2] + \sum_{i \neq j} E[(z_i - \mu)(z_j - \mu)] \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{E[(z_i - \mu)^2]}_{\sigma^2} + \sum_{i \neq j} \underbrace{E[(z_i - \mu)(z_j - \mu)]}_{=\text{Cov}(z_i, z_j) = 0} \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

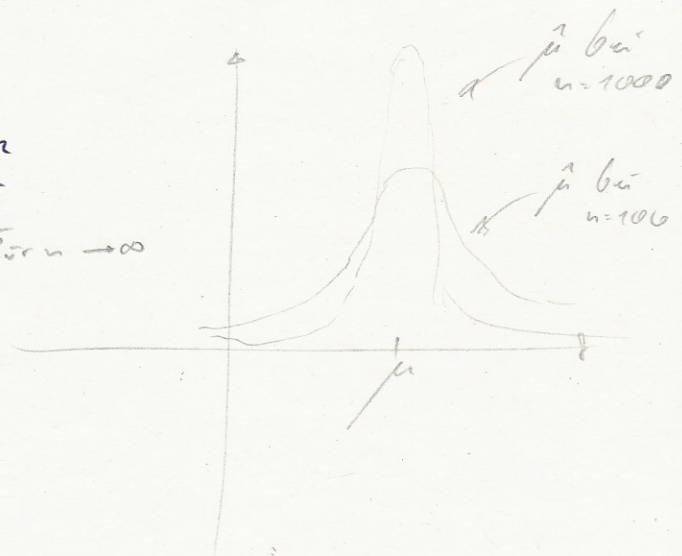
$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$$

$$\text{Bias}(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

$\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$

Man kann zeigen

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$



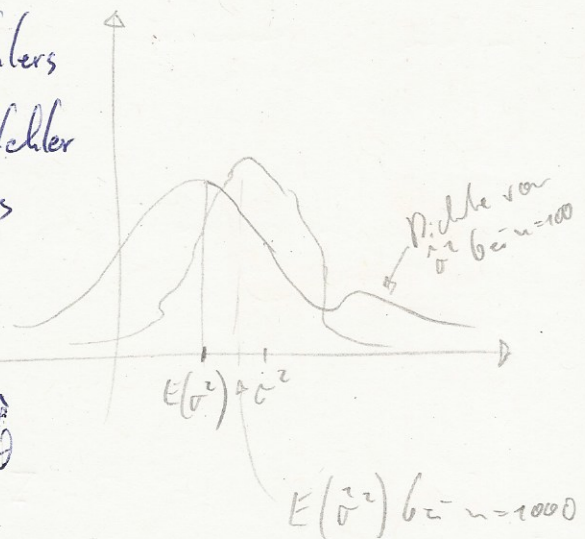
$\hat{\theta} - \theta = \text{Schätzfehler}$

$|\hat{\theta} - \theta|$ Absolutbetrag des Schätzfehlers

$E|\hat{\theta} - \theta|$ mittlerer absoluter Schätzfehler
 $\rightarrow$ Maß für die Güte des Schätzers

$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$... mittlerer quadratischer Fehler des Schätzers $\hat{\theta}$

mean squared error



Es gilt immer: $MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2$

Beweis:

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2] \\ &= E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] \\ &= E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2 + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2 \end{aligned}$$

$$MSE(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$MSE(\hat{\sigma}^2) = \underbrace{\text{Var}(\hat{\sigma}^2)}_{\approx \frac{\text{const}}{n}} + \frac{\sigma^4}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

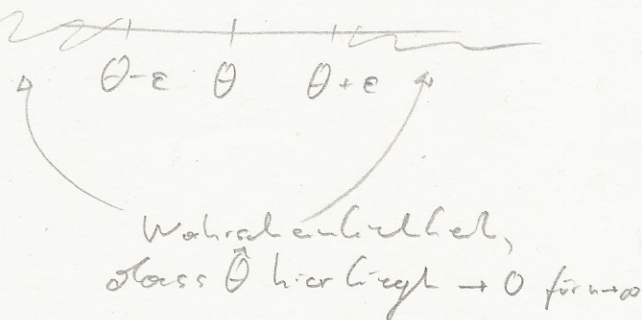
Für viele Schätzer g.l.t.: $MSE(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (o./l. $MSE(\hat{\theta}) \approx \frac{\text{const}}{n}$)

Konsistenz: Ein Schätzer $\hat{\theta} (= \hat{\theta}_n)$ heißt konsistent für θ , falls

$$P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

Schätzer: $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$
für $n \rightarrow \infty$

" $\hat{\theta}$ konvergiert gegen θ
in Wahrscheinlichkeit"



$$\Rightarrow P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Es g.l.t.: Ang. $MSE(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann folgt
 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ für $n \rightarrow \infty$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ Ungleichung (*) g.l.t.:

$$0 \leq P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{E[(\hat{\theta} - \theta)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{MSE(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ da } MSE(\hat{\theta}) \rightarrow 0$$

Erinnerung:
Tschebyscheff Ungleichung
S. (1. Vorlesung)

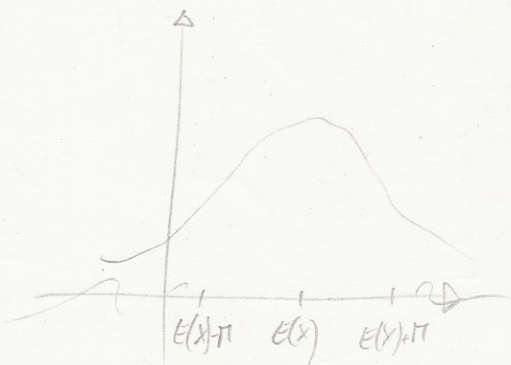
Sei X eine Zufallsvariable mit end. Varianz (d.h. $E(X^2) < \infty$)

Dann gilt für jedes $M > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq M) \leq \frac{\text{Var}(X)}{M^2}$$

Etwas allgemeiner:

$$P(|X - c| \geq M) \leq \frac{E[(X - c)^2]}{M^2}$$



(Ohne Beweis)

Zurück zu Bsp III.19

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{\substack{A \text{ } 1 \times n \\ \text{rang}(A) = 1}}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \sim N_n\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}, \sigma^2 \mathbb{I}_n\right) \text{ wegen Bsp. I.41}$$

Reproduktions-
satz $\Rightarrow \hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Äquivalent: $\hat{\mu} - \mu \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Oder: $\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \sim N(0, \sigma^2)$

Oder: $\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Man kann zeigen, dass

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \approx N(0, 2\sigma^4)$$

↑
approximativ für große Stichproben n

Oder:
$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)}{\sigma^2} \approx N(0, 2)$$

Testproblem: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ gegen $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Testgröße:
$$V = \frac{\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma_0^2)}{\sigma_0^2} \approx N(0, 2) \text{ unter } H_0$$

Verwirft H_0 , falls $|V| > c_\alpha$, wobei c_α das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil einer $N(0, 2)$ -Verteilung ist.

Für viele Schätzer g.l.t.:

(i) $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ für $n \rightarrow \infty$

(ii) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \approx N(0, \tau^2)$ für große n , wobei $\tau^2 = \tau^2(\theta)$

- $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ für $n \rightarrow \infty$ (d.h. Für $\varepsilon > 0$ gilt $P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)
- $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \approx N(0, \Sigma)$ approximativ für großes n

formal: $F_n(t) = P(\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \leq t)$. Sei $Z \sim N(0, \Sigma)$ und sei $F(t) = P(Z \leq t)$

Dann g.l.h.: $F_n(t) \rightarrow F(t)$ für $n \rightarrow \infty$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$

(mit anderen Worten: $P(\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \leq t) \rightarrow P(Z \leq t)$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $t \in \mathbb{R}$)

- Ist θ ein $p \times 1$ Vektor und ergo auch $\hat{\theta}$, dann $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ heißen:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $P(\|\hat{\theta} - \theta\| > \varepsilon) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

$$\text{hier: } \|\hat{\theta} - \theta\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}$$

- $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \approx N(0, \Sigma)$ soll heißen: Die Verteilungsfunktion $F_n(t)$ von $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ konvergiert gegen $F(t)$, die Verteilungsfunktion von $Z \sim N(0, \Sigma)$, im Sinne, dass $F_n(t) \rightarrow F(t)$ für $n \rightarrow \infty$ und $\forall t \in \mathbb{R}^p$

Satz III 21 Seien $\underbrace{z_1, \dots, z_n}_{q \times 1}$ i.i.d. mit Dichte $f(z, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$. Dann gilt unter geeigneten Regularitätsbedingungen für den ML-Schätzer $\hat{\theta}_n$:

$$\bullet \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\bullet \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \approx N(0, \Sigma),$$

$$\text{wobei } \Sigma = \left(E \left[\underbrace{\frac{\partial \log f(z_i, \theta)}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial \log f(z_i, \theta)}{\partial \theta} \right)'}_{\substack{\text{zufällige} \\ p \times p \text{ Matrix}}} \right] \right)^{-1}$$

"Informationsmatrix"

$$(\text{Notation: } \frac{\partial \log f(z_i, \theta)}{\partial \theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \log f(z_i, \theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \log f(z_i, \theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \log f(z_i, \theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \text{ "score vector"}$$

Satz III.22 Seien $z_1, \dots, z_n$ i.i.d. von Dimension $q \times 1$
 Sei $h(\theta) = E g(z_i)$, wobei $g: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$

Sei $\hat{\theta}$ der Maximumlikelihoodschätzer, welcher

$$h(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i)$$

erfüllt.

Dann $g(\cdot)$ unter geeigneten Regularitätsbedingungen

$$\bullet \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\bullet \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \approx N(0, \Omega)$$

$$\text{mit } \Omega = \left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right)^{-1} V(g(z_1)) \left(\left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right)^{-1} \right)'$$

Hier ist:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_p}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$$

"Jacobi-Matrix"

$$h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$h(\theta) = \begin{bmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \\ \vdots \\ h_p(\theta) \end{bmatrix}$$

IV Zeitreihen

Bei vielen Daten $z_1, \dots, z_n$ ist die Nummerierung unerheblich (z.B. Gewicht bzw. Größe von Personen, Einkommen der Haushalte, etc.)

Solche Daten werden sinnvollerweise als Zufallsstichprobe modelliert. D.h. als Beobachtungen an $z_1, \dots, z_n$, welche i.i.d. sind.

Bei vielen anderen Daten ist das nicht der Fall:

z.B. US GDP (/Jahr)

Monatliche Arbeitslosenrate (/Monat)

Einkommen eines Haushalts (in der Zeit)

etc.

"Zeitreihen"

Typische Eigenschaft von Zeitreihen ist, dass sie "autokorreliert" sind; soll heißen: Z_t, Z_s i.A. nicht unkorreliert

(und manchmal auch nicht identisch verteilt)

Definition IV 2:

Eine Folge $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt (schwach) stationär, falls g. U. dass $E(Z_t^2) < \infty$

(i) $E(Z_t) = \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

$$(ii) E[(Z_t - \mu)(Z_{t+r} - \mu)] = k(r) \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{Z}$$

$$(ii) E[(Z_t - \mu)(Z_{t+r} - \mu)] = k(r) \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{Z}$$

$$y_t = \alpha + \beta t + U_t \quad \begin{array}{l} \text{Modellierungs-} \\ \text{annahme} \\ E(U_t) = 0 \end{array}$$

Schätzung:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t + \hat{U}_t \quad \hat{U}_t \text{ "Residuum"}$$

$$y_t = \alpha + \beta t + \epsilon t^2 + V_t$$

Beachte:

(i) impliziert $E[(Z_t - \mu)^2] = k(0)$ hängt nicht von t ab

und $\text{Cov}(Z_t, Z_{t+1}) = k(1)$ hängt nicht von t ab

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t+2}) = k(2) \quad - \quad - \quad -$$

($k(r)$ heißt Kovarianzfunktion)

Bsp IV 3: $(z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(z_t^2) < \infty$

Dann ist (z_t) schwach stationär. z_t und z_s haben dieselbe Verteilung, ergo denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz

Wahrs.: $(z_t - \mu)(z_{t+1} - \mu)$ und $(z_s - \mu)(z_{s+1} - \mu)$ haben selbe Verteilung, ergo gilt $E(z_t z_{t+1}) = E(z_s z_{s+1}) \forall t, s$,
d.h. $E(z_t z_{t+1}) = k(1)$

"Starkes weißes Rauschen"

Bsp IV 4: $E(z_t) = 0 \forall t \in \mathbb{Z}$, $E(z_t^2) = \sigma^2 \forall t \in \mathbb{Z}$
Var(z_t)

$$\underbrace{E(z_t z_s)}_{= \text{Cor}(z_t, z_s)} = 0 \text{ für } t \neq s$$

(z_t) ist schwach stationär.

("Schwaches weißes Rauschen")

Bsp IV 5 Sei $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwaches Rauschen

Sei $z_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$ (MA(1)-Prozess)

"Moving Average Prozess
der Ordnung 1"

(Z_t) ist schwach stationär

$\bullet E(Z_t) = 0$ hängt nicht von t ab

$$\bullet E(Z_t Z_{t+r}) = \begin{cases} \sigma^2(1+b^2) & \text{für } r=0 \\ \sigma^2 b & \text{für } r=\pm 1 \\ 0 & \text{für } |r| > 1 \end{cases}$$

hängt nicht von t ab

$\Rightarrow (Z_t)$ schwach stationär

Bemerkung

(i) Der $MA(1)$ -Prozess (Z_t) weist Korrelation nur zwischen Z_t und Z_{t+1} (bzw. Z_{t-1}) auf.

$$(ii) \text{Corr}(Z_t, Z_{t+1}) = \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t+1})}{\text{Var}(Z_t)} =$$

$$= \frac{\sigma^2 b}{\sigma^2(1+b^2)} = \frac{b}{1+b^2}$$

$$\text{Es gilt: } \left| \frac{b}{1+b^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

D.h., (bzw.) dass $MA(1)$ kann keine starken Korrelationen zwischen Z_t und Z_{t+r} modellieren

Bsp. IV. 6 Autoregressiver Prozess der Ordnung 1

(AR(1))

Differenzengleichung

$$(*) \quad Z_t = \alpha Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad \text{wobei } (\varepsilon_t) \text{ weißes Rauschen}$$

Annahme: Stabilitätsannahme $|\alpha| < 1$

$$Z_1 = \alpha Z_0 + \varepsilon_1$$

$$Z_2 = \alpha Z_1 + \varepsilon_2 = \alpha^2 Z_0 + \alpha \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$Z_3 = \alpha Z_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_3 + \alpha \varepsilon_2 + \alpha^2 \varepsilon_1 + \alpha^3 Z_0$$

⋮

$$Z_t = \dots = \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} + \alpha^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha^{t-1} \varepsilon_1 + \alpha^t Z_0$$

hängt nicht von Z_0 ab

geht exponentiell
schnell nach
Null für $t \rightarrow \infty$

Es gibt eine ausgezeichnete Lösung Z_t^* der Differenzengleichung (*), welche schwach stationär ist. Nämlich:

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j}$$

$$E(Z_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j}\right) \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \underbrace{E(\varepsilon_{t-j})}_{=0} = 0$$

weißes Rauschen

$$E(Z_t^2) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i}\right) \stackrel{!}{=} E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{j+i} \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-i}\right) \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{j+i} E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-i})$$

$E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-i}) = \begin{cases} \sigma^2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i} \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha^2)^i = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

hängt nicht von t ab

$$E(z_t z_{t+1})$$

$$E(z_t z_{t+2})$$

⋮

Man kann zeigen $\gamma(r)$

$$E(z_t z_{t+r}) = \sigma^2 \frac{\alpha^{|r|}}{1-\alpha^2}$$

Also ist (z_t) schwach stationär!

$$\text{Corr}(z_t, z_{t+r}) = \frac{\text{Cov}(z_t, z_{t+r})}{\sqrt{\text{Var}(z_t)} \sqrt{\text{Var}(z_{t+r})}} = \frac{\sigma^2 \alpha^{|r|}}{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}} = \alpha^{|r|}$$

$$\Rightarrow \text{Corr}(z_t, z_t) = 1$$

$$\text{Corr}(z_t, z_{t+1}) = \alpha$$

$$\text{Corr}(z_t, z_{t+2}) = \alpha^2$$

⋮

Autokorrelationsfunktion

$$\text{Corr}(z_t, z_{t+r}) = \frac{\gamma(r)}{\gamma(0)}$$